

УДК 539.3

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ БОЛЬШИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Р.Л. ДАВЫДОВ, Л.У. СУЛТАНОВ

Аннотация

Настоящая работа посвящена разработке и численной реализации методики исследования напряженно-деформированного состояния упруго-пластических тел с учетом больших деформаций. Используется процедура пошагового нагружения. Разрешающее уравнение получено из принципа виртуальных мощностей. Пространственная дискретизация основана на методе конечных элементов (МКЭ).

Ключевые слова: Большие деформации, нелинейная упругость, пластичность.

1. Кинематика среды. Уравнение в скоростях напряжений

В качестве тензоров, описывающих деформацию и скорость деформации, используются тензор градиента деформации (F), мера деформации Фингера (B) = $(F) \cdot (F)^T$, тензор пространственного градиента скорости (h) = $\frac{\partial v_i}{\partial y_j} (\vec{e}_i \vec{e}_j) = (\dot{F}) \cdot (F)^{-1}$, тензор деформации скорости (d) = $\frac{1}{2} [(h) + (h)^T]$, где v_i - компоненты вектора скорости \vec{v} , y_j - компоненты радиус-вектора, $(\vec{e}_i \vec{e}_j)$ - диадное произведение орт декартовой системы координат. Напряженное состояние описывается с помощью тензора истинных напряжений (Σ) = $\sigma_{ij} (\vec{e}_i \vec{e}_j)$, определенного в актуальном состоянии.

Для решения задач с учетом физической нелинейности (в первую очередь задач пластического деформирования) получили распространение формулировки разрешающих вариационных уравнений в скоростях деформаций и напряжений. Такие уравнения могут быть получены дифференцированием по времени уравнения принципа виртуальных мощностей в актуальной конфигурации [1, 2]

$$\int_{\Omega} (\Sigma) \cdot \cdot (\delta d) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \delta \vec{v} d\Omega + \int_{S^\sigma} \vec{p} \cdot \delta \vec{v} dS. \quad (1)$$

где Ω - текущий объем, S^σ - часть поверхности, на которой заданы усилия, \vec{f}, \vec{p} - векторы объемных и поверхностных сил соответственно. После линеаризации (1) получим уравнение в скоростях напряжений

$$\int_{\Omega} \left[(\dot{\Sigma}) \cdot \cdot (\delta d) + (\Sigma) \cdot \cdot (\delta \dot{d}) + \frac{\dot{J}}{J} (\Sigma) \cdot \cdot (\delta d) \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left[\dot{\vec{f}} + \vec{f} \frac{\dot{J}}{J} \right] \cdot \delta \vec{v} d\Omega + \int_{S^\sigma} \left[\dot{\vec{p}} + \vec{p} \frac{\dot{J}}{J} \right] \cdot \delta \vec{v} dS, \quad (2)$$

где $J = \det(F)$ - относительное изменение объема.

2. Определяющие соотношения

Определяющие соотношения получим используя потенциальную энергию упругой деформации, которую определяет функция W . Для скорости напряжений Коши - Эйлера получим выражение [3-6]:

$$\left(\dot{\Sigma}\right) = \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial B}\right) \cdot \cdot \left(\dot{B}\right) = (\Lambda_{\Sigma}) \cdot \cdot (d) + (h) \cdot (\Sigma) + (\Sigma) \cdot (h)^T - (\Sigma) I_{1d}$$

где введено обозначение

$$(\Lambda_{\Sigma}) = \frac{4}{J} (B) \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial B \partial B}\right) \cdot (B).$$

В результате получаем физическое соотношение упругого деформирования для производной Трусделла [7] в виде линейного уравнения:

$$(\Sigma^{Tr}) = (\Lambda_{\Sigma}) \cdot \cdot (d), \quad (3)$$

где $(\Sigma^{Tr}) = \left(\dot{\Sigma}\right) + (h) \cdot (\Sigma) + (\Sigma) \cdot (h)^T - I_{1d}(\Sigma)$ - производная Трусделла тензора напряжений (Σ) .

Моделирование упругопластических деформаций основано на аддитивном представлении полной деформации скорости [8,9], т.е.

$$(d) = (d^e) + (d^p),$$

где (d^e) - упругая составляющая, а (d^p) - пластическая.

Предполагается справедливость ассоциированного закона течения:

$$(d^p) = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma}\right),$$

где $\dot{\lambda}$ - скорость пластических деформаций, Φ - функция текучести.

Рассмотрим в качестве критерия упругого деформирования условие Губера-Мизеса, которое для изотропной среды допускает обобщение в виде:

$$\Phi = \sigma_i - \sigma_T(\chi) \leq 0, \quad (4)$$

где σ_i - интенсивность напряжений, $\sigma_T(\chi)$ - предел текучести, χ - параметр упрочнения.

Тогда используя (4) пластическую деформацию скорости можно записать следующим образом

$$(d^p) = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma}\right) = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial \Sigma'}\right) = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{(\Sigma')}{\sigma_i}.$$

3. Общий алгоритм решения

Процесс деформирования представляется в виде последовательности равновесных состояний. Переход от предыдущего состояния к последующему происходит путем приращения нагрузки.

В качестве базового на шаге нагружения используется уравнение в скоростях напряжений (2) в совокупности с линеаризованными физическими соотношениями (3), решая которую получим вектор перемещений, определяющий конфигурацию на следующем шаге нагружения:

$${}^{k+1}y^i = {}^ky^i + \Delta^k u^i \quad (5)$$

и напряженное состояние

$${}^{k+1}\sigma_{ij} = {}^k\sigma_{ij} + {}^k\dot{\sigma}_{ij}\Delta t \quad (6)$$

Далее для учета пластических деформаций применяем метод проецирования [9]. В результате использования метода "проецирования напряжения на поверхность текучести" полученное напряженное состояние не удовлетворяет разрешающей системе уравнений. Поэтому воспользуемся итерационным уточнением НДС. Эта итерационная процедура основана на введении в разрешающее уравнение вариации мощности "дополнительных напряжений" (Σ_∂) на возможных деформациях скорости, где дополнительные напряжения определяются как разность истинных и пробных напряжений, определяемых по формуле

$$({}^k\Sigma_\partial^{m+1}) = (\Sigma^m) - (\Sigma'^m)$$

Для дискретизации системы уравнений (2) используется метод конечных элементов на основе восьмиузлового элемента [10, 11]. В итоге для m -ой итерации на k -м шаге нагружения имеем:

$${}^kK\Delta^k u^m = \Delta^k P + {}^kH - {}^kS^m$$

где ${}^kS^m$ - вектор дополнительных напряжений.

4. Численные примеры

В физических соотношениях в качестве примера используется следующий потенциал упругих деформаций [18, 19]:

$$W = \frac{\lambda + 2\mu}{8}(I_{1B} - 3)^2 + \mu(I_{1B} - 3) - \frac{\mu}{2}(I_{2B} - 3)$$

где λ , μ - параметры Ляме. В качестве базового в настоящей работе используется произвольный восьмиузловой конечный элемент. При вычислении интегралов используется схема численного интегрирования.

5. Упругопластическое растяжение круглого стержня

Рассмотрим задачу растяжения круглого стержня со следующими параметрами: $R=6,413$ мм, $R_0=0,982R$ мм, $L=26,667$ мм. Отметим, что для конкретизации места образования шейки в центре стержня задается снижение радиуса на 1,8%. Критерием пластичности служит условие Губера-Мизеса (4). Функция нелинейного изотропного упрочнения имеет вид [12, 13]:

$$\sigma_T(\chi) = \sigma_T + h\chi + (\sigma_\infty - \sigma_T)(1 - e^{-\delta\chi}).$$

Параметры материала: $E = 206,9$ ГПа, $\nu = 0,29$, $\sigma_\infty = 715$ ГПа, $\sigma_T = 450$ ГПа, $h = 0,129$, $\delta = 16,93$. В качестве нагрузки на торце задается перемещение $u=7$ мм. На рис. 1 приводится интенсивность пластических деформаций для конечного положения, на рис. 2 - диаграмма сила - перемещение.

6. Упругопластическое деформирование трубы

Исследуем закритическое поведение трубы под действием крутящих моментов M , приложенных на торцах. Диаметр трубы $d=70$ мм, длина $L=200$ мм, толщина

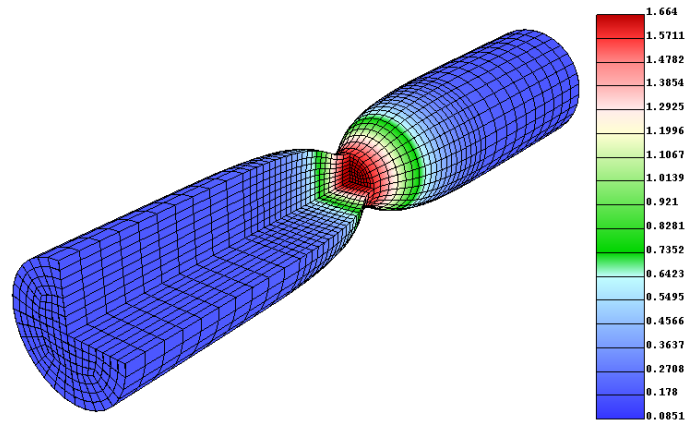
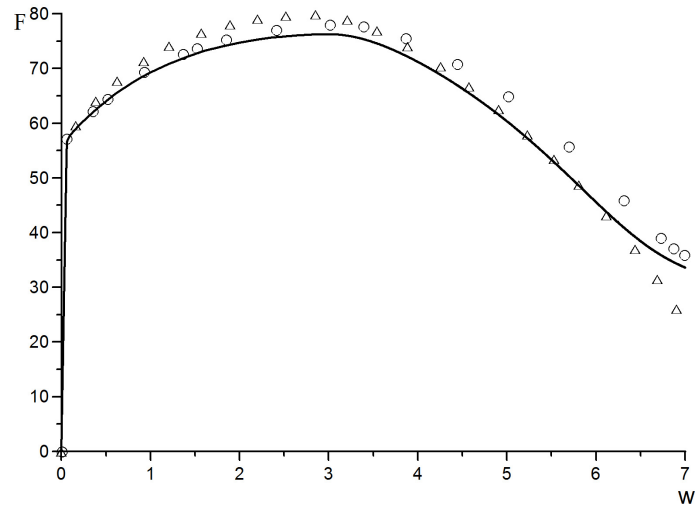


Рис. 1. Интенсивность пластических деформаций

Рис. 2. Диаграмма сила - перемещение торца: сплошная кривая - решение по описанной методике, \circ - решение [12], Δ - решение [13]

$h=3$ мм. Критерием пластичности служит условие Губера-Мизеса (4). Функция нелинейного изотропного упрочнения имеет вид [12, 13]:

$$\sigma_T(\chi) = \sigma_T + h\chi + (\sigma_\infty - \sigma_T)(1 - e^{-\delta\chi}).$$

Параметры материала: $E = 206,9$ ГПа, $\nu = 0,29$, $\sigma_\infty = 715$ ГПа, $\sigma_T = 450$ ГПа, $h = 0,129$, $\delta = 16,93$. На рисунке 3 представлена интенсивность пластических деформаций для деформированного состояния.

Заключение

В работе построена методика численного исследования изотропных материалов с использованием левого тензора Коши - Грина, для которых физические соотношения задаются с помощью упругого потенциала. В качестве примера рассмотрен материал 2-го порядка. Получены линейаризованные определяющие соотношения и

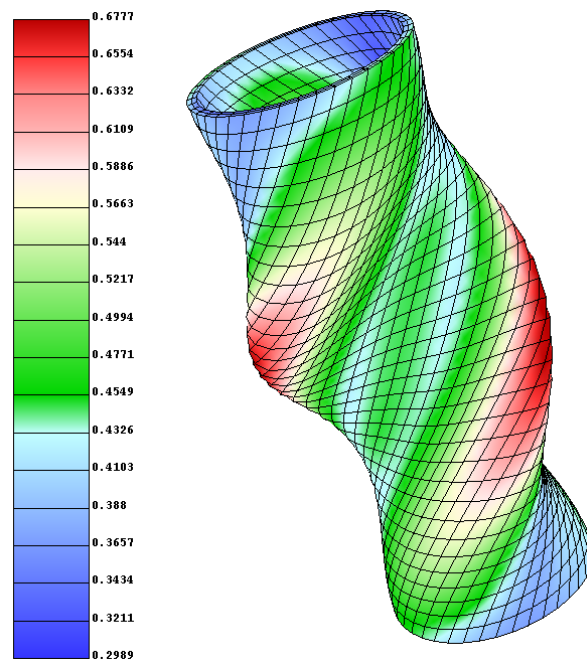


Рис. 3. Интенсивность пластических деформаций

разрешающее уравнение. Численная реализация основана на методе конечных элементов на базе восьмиузлового полилинейного элемента. Решены задача о упруго-пластическом растяжении круглого стержня и задача о кручении толстостенной трубы. Решенные задачи демонстрируют работоспособность полученной методики исследования нелинейно упругих задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №№ 13-01-97058, 13-01-97059, 12-01-00955, 12-01-97026.

Summary

R.L. DAVYDOV, L.U. SULTANOV FINITE ELEMENT ALGORITHM FOR ANALYSIS OF ELASTOPLASTIC SOLIDS WITH LARGE DEFORMATIONS.

A technique for analyzing the stress strain state of elastoplastic bodies taking into account large displacements and buckling is presented. The step-by-step loading method with formulation of the resolvent variation equation in the current configuration is used. The governing equations for elastoplastic bodies that connect the Truesdell derivative of the Cauchy stress tensor with the velocity strain are applied. The spatial discretization is based on the finite element method (FEM). The numerical solutions of the problems are given.

Key words: large deformations, nonlinear elasticity, plasticity.

Литература

1. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. I. Кинематика и вариационные уравнения // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2008. – Т. 150, Кн 1. – С. 29–37.

2. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. II. Физические соотношения // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2008. – Т. 150, Кн 3. – С. 122–132.
3. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел III. Постановки задачи и алгоритмы решения // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2009. – Т. 151, Кн 3. – С. 108–120.
4. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел IV. Конечноеэлементная реализация. Примеры решения задач // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2010. – Т. 152, Кн 4. – С. 115–126.
5. Голованов А.И., Султанов Л.У. Численное исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел // Прикладная механика. - Киев. – 2005 – Т. 41. – №6 – с. 36–43.
6. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. – 1997. – 283 p.
7. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
8. Грин А., Адкинс Д. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
9. Голованов А. И., Султанов Л. У. Исследование закритического упругопластического состояния трехмерных тел с учетом конечных деформаций // Известия Вузов. Авиационная техника. – 2008. – N 4. – с.13-16
10. Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
11. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
12. Schröder J., Gruttmann F. Löblein J. A simple orthotropic finite elasto-plasticity model based on generalized stress-strain measures // Computational Mechanics – 2002, p.48-64.
13. Eidel B., Gruttmann F. Elastoplastic orthotropy at finite strains: multiplicative formulation and numerical implementation // Computational Materials Science. 2003. Vol. 28. P. 732-742.
14. Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – 465 с.
15. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск, 2000. – 262 с.
16. Голованов А.И., Султанов Л.У. Теоретические основы вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. – Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, 2008. – 165 с.
17. Давыдов Р.Л., Султанов Л.У. Численный алгоритм решения задачи о больших упругопластических деформациях МКЭ // Вестник ПНИПУ. Механика. - Пермь: Изд-во ПНИПУ – 2013. – №1. – С. 81–93.
18. Султанов Л.У., Давыдов Р.Л. Численное исследование больших деформаций методом конечных элементов // Инженерно-строительный журнал. Санкт-Петербург: СПбГУ. – 2013.. – №9 (44). – С. 64–68.
19. Golovanov A.I., Sultanov L.U. Numerical investigation of large elastoplastic strains of three-dimensional bodies // International Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 41. – №6. – P. 614–620.

20. **Sultanov L.U., Davydov R.L.** Mathematical modeling of large elastic-plastic deformations // Applied Mathematical Sciences. – Vol. 8. – N 57-60. – 2014. – PP. 2991-2996.

Сведения о каждом из авторов статьи

Султанов Ленар Усманович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической механики ФГАОУ ВПО КФУ, (420008, Россия, РТ, г.Казань, ул. Кремлевская, д.18.

E-mail: *Lenar.Sultanov@kpfu.ru*

Давыдов Руслан Лаврентьевич – аспирант кафедры теоретической механики ФГАОУ ВПО КФУ, (420008, Россия, РТ, г. Казань, ул. Кремлевская, д.18.

E-mail: *ruslan.davydov@mail.ru*